I) Définition

1)Unité daire u.a

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.l'unité d'aire notée u.a est l'aire du rectangle de dimension $\|\vec{\imath}\|$ et $\|\vec{\jmath}\|$

$$1\text{u.a} = \|\vec{\imath}\| \times \|\vec{\jmath}\| cm^2$$

Exemples

- $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$un repère orthogonal
$\|\vec{\imath}\| = 1cm$ et $\|\vec{\jmath}\| = 2cm$

$$1\text{u.a} = 1cm \times 2cm = 2cm^2$$

- $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$un repère orthogonal
$\|\vec{\imath}\| = 2cm$ et $\|\vec{\jmath}\| = 2cm$

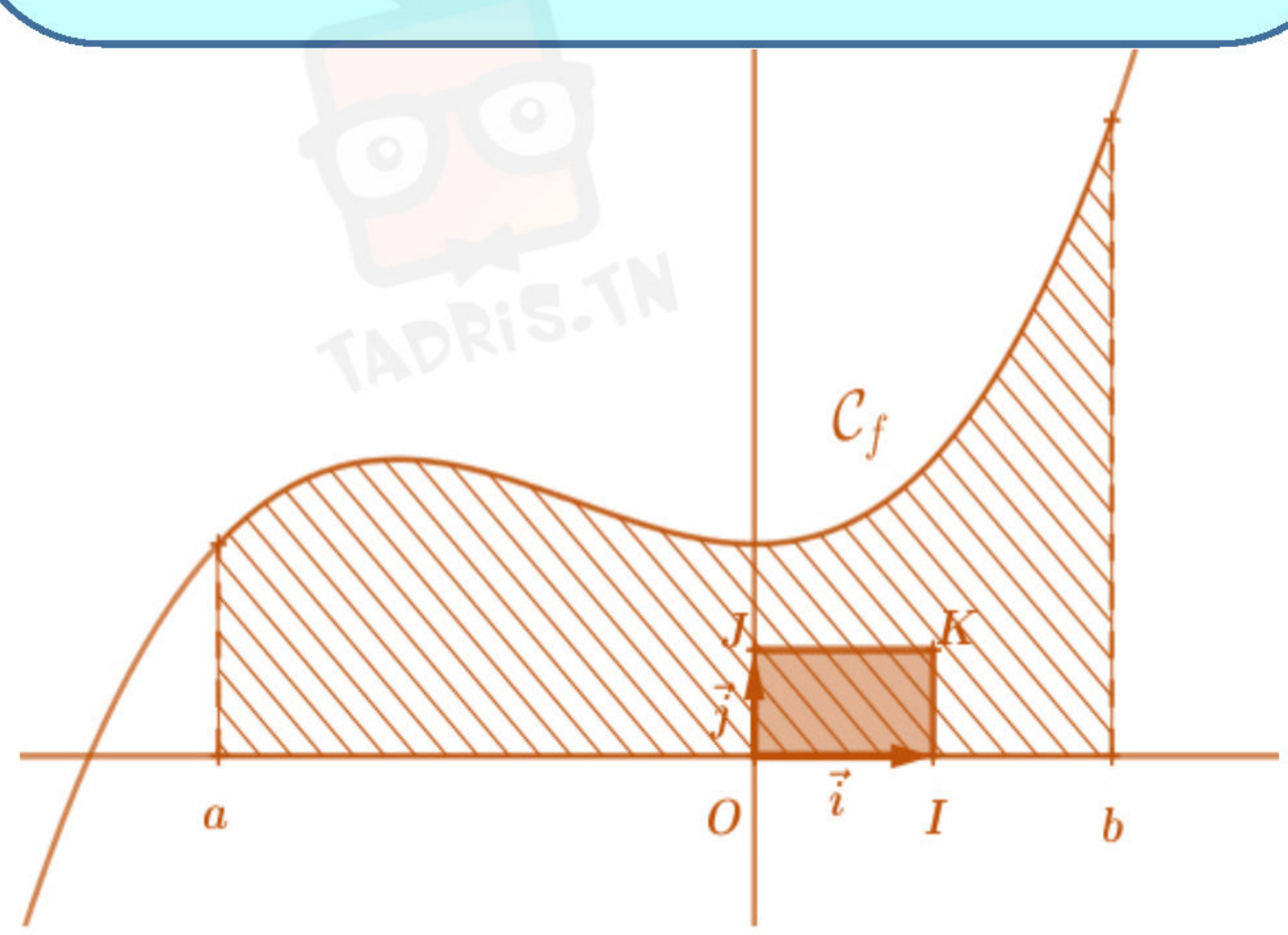
$$1\text{u.a} = 2cm \times 2cm = 4cm^2$$

2)Intégrale d'une fonction continue et positive

Définition

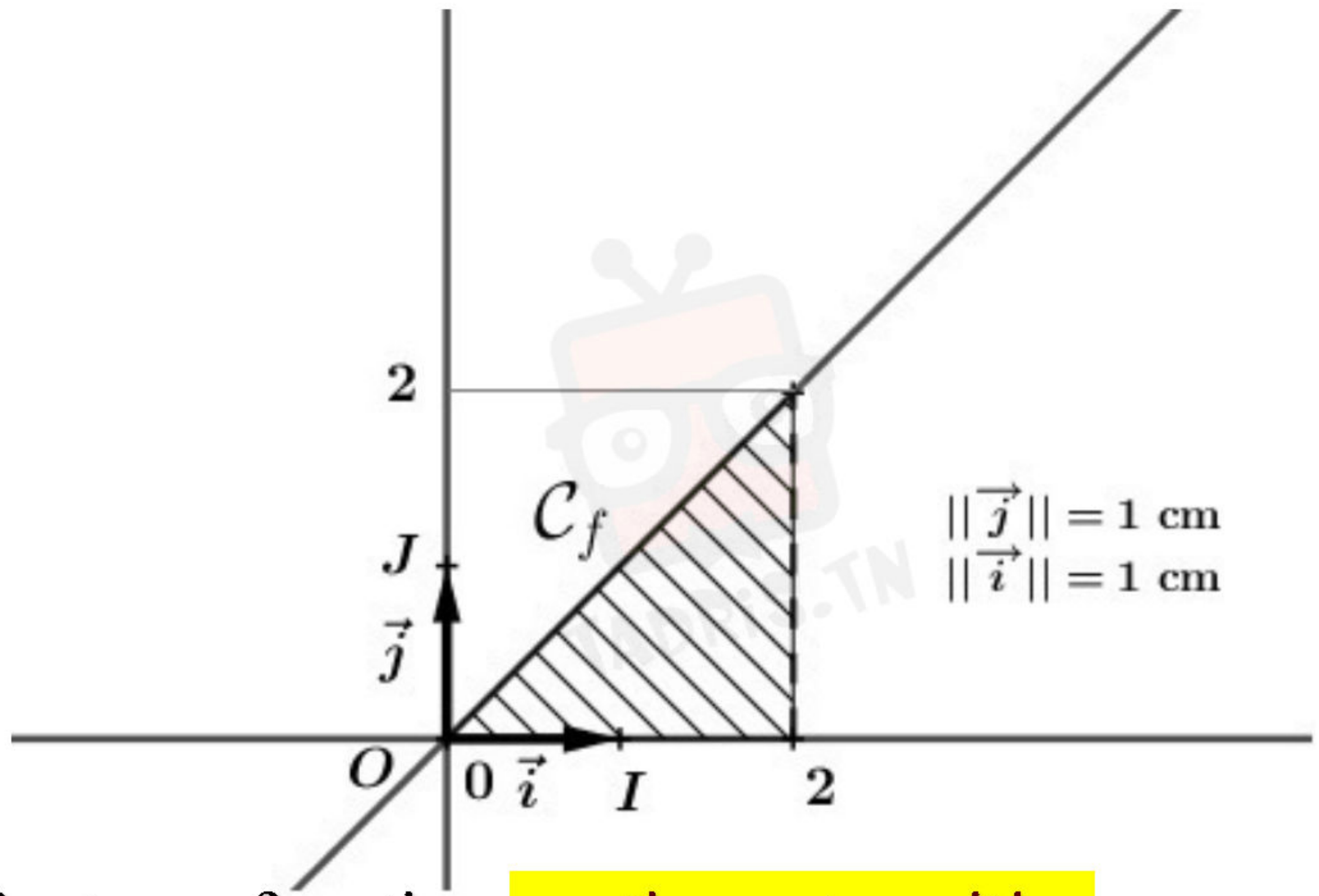
Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle$[a, b]$.
On appelle intégrale de f de a à b et on note $\int_a^b f(x)dx$l'aire en u.a de la partie du plan délimitée par la courbe représentative de f ,l'axe des abscisses$(O, \vec{\imath})$ et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$



Exemple

Soit f la fonction linéaire définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x$
On désigne par $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$



f est une fonction continue et positive sur l'intervalle$[0,2]$.
Soit $\mathcal{A}$ l'aire en u.a de la partie du plan délimitée par la courbe représentative de f ,l'axe des abscisses$(O, \vec{\imath})$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$
On a : $\mathcal{A} = 2$u.a l'aire du triangle

$$donc \ \int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 xdx = 2$$

3)Intégrale d'une fonction continue

a) propriété

Soit f une fonction continue sur un intervalle I
Si F et G sont deux primitives de f sur I alors pour tous réels a et b de I on a :

$$G(b) - G(a) = F(b) - F(a)$$

Démonstration :

F et G sont deux primitives de f sur I alors $pour\ tout\ x \in I$ on a $G(x) = F(x) + C$ $avec\ C \in \mathbb{R}$ donc :

$$G(b) - G(a) = F(b) + C - F(a) - C$$
$$= F(b) - F(a)$$

b) Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle$I$, a et b deux réels de I et F une primitive de f sur I .
On appelle intégrale de f de a à b et on note $\int_a^b f(x)dx$,le réel $F(b) - F(a)$

on écrit $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

c)Notations et vocabulaires

☞Lorsque $a \leq b$ le réel $\int_a^b f(x)dx$ est appelé intégrale de f sur $[a, b]$

☞Dans l'écriture $\int_a^b f(x)dx$,on peut remplacer la lettre x par n'importe quelle lettre et on peut écrire

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(y)dy$$

On dit que x est une variable muette.

☞ Dans l'écriture $\int_a^b f(x)dx$

a et b sont appelés les bornes d'intégration et x est la variable d'intégration

☞ On écrit :

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

L'expression $[F(x)]_a^b$ se lit

« $F(x)$pris entre a et b »

☞$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ ne dépend pas de la fonction primitive choisie F

Exemples

1)Calculer $\int_0^2 f(x)dx$ avec f la fonction linéaire définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x$

☞La fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \frac{1}{2}x^2$est une primitive de f sur $\mathbb{R}$

On a $F(0) = 0$ et $F(2) = \frac{1}{2}2^2 = 2$

alors $F(2) - F(0) = 2 - 0 = 2$

donc$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 xdx = [F(x)]_0^2$

$= F(2) - F(0) = 2$

2)Calculer $\int_{-3}^3 f(x)dx$ avec f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$

☞La fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \frac{1}{4}x^4$est une primitive de f sur $\mathbb{R}$

donc$\int_{-3}^3 f(x)dx = [F(x)]_{-3}^3$

$= F(3) - F(-3)$

Or $F(3) = \frac{1}{4}3^4 = \frac{81}{4}$

et $F(-3) = \frac{1}{4}(-3)^4 = \frac{81}{4}$ donc

$F(3) - F(-3) = \frac{81}{4} - \frac{81}{4} = 0$

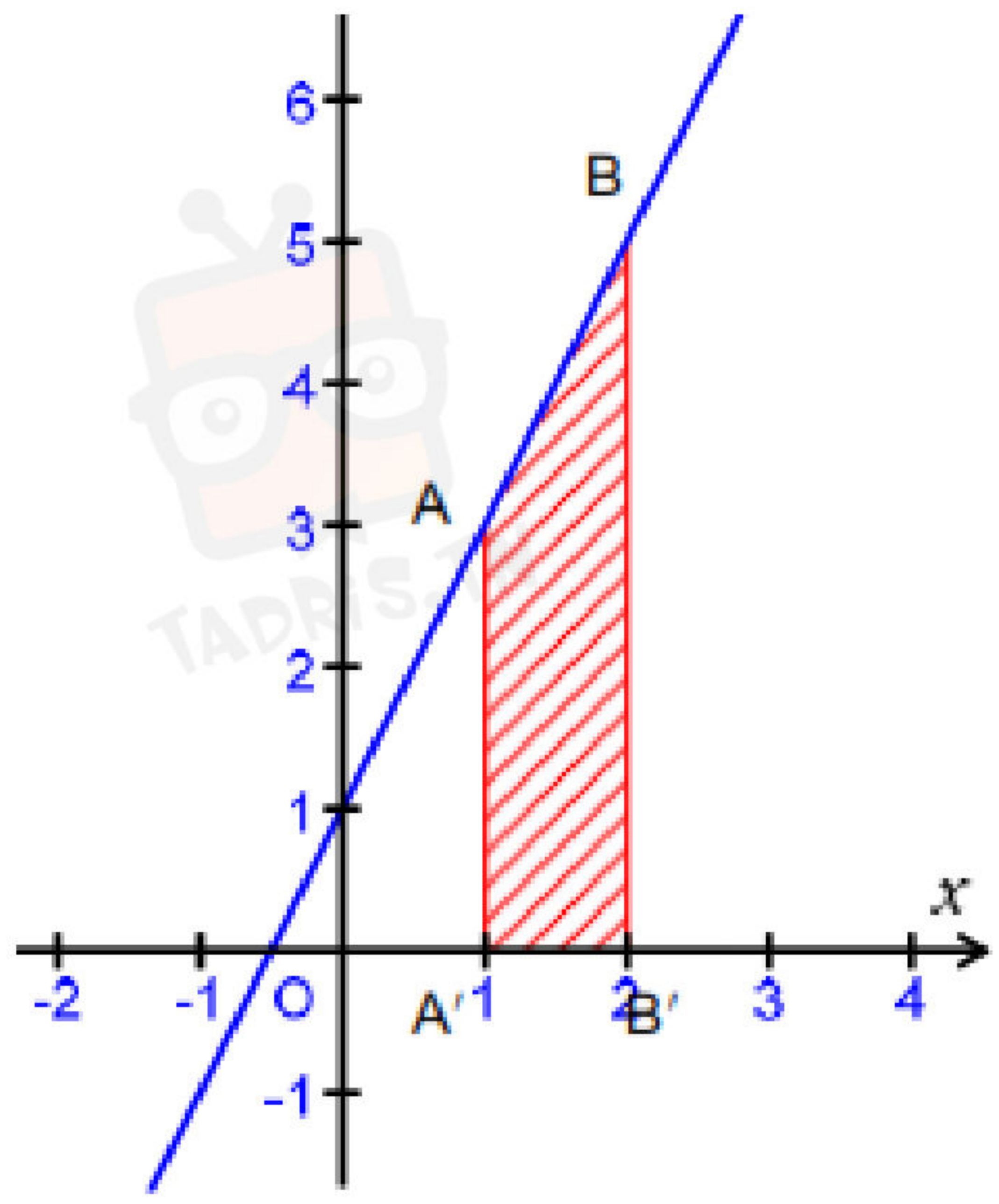
D'ou $\int_{-3}^3 x^3 dx = 0$

ExerciceN°1

Soit f la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 1$

On désigne par $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Calculer $\int_1^2 f(x)dx$ par deux méthodes



ExerciceN°2

Calculer les intégrales suivantes

1) $I = \int_0^3 (5x^4 - x^3 - 2)dx$
2) $I = \int_1^4 \sqrt{x}\, dx$
3) $I = \int_{-2}^{-1} \frac{1}{x^2} dx$
4) $I = \int_{-1}^2 (3x^2 + 1)(x^3 + x - 2)dx$
5) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\, sin^3(t)dt$
6) $I = \int_0^1 \frac{2x^3}{\sqrt{1+x^4}} dx$

II) Propriétés et Théorème

1)Propriétés

Soit f une fonction continue sur un intervalle I , a,b et c des réels de I

P_1: $\int_a^a f(x)dx = 0$

P_2: $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

P_3: *Relation de Chasles*

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

2)Théorème(linéarité)

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle$[a, b]$

- $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
- $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$ Pour tout réel k

Démonstration :

1)f est une fonction continue sur I alors f admet au moins une primitive F sur I

a,b et c des réels de I

☞ $\int_a^a f(x)dx = \mathrm{F}(a) - \mathrm{F}(a) = 0$

☞ $\int_b^a f(x)dx = [F(x)]_b^a = \mathrm{F}(a) - \mathrm{F}(b)$

$$= -[\mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)]$$

$$= -\int_a^b f(x)dx$$

☞ $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$

$$= \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(c) + \mathrm{F}(c) - \mathrm{F}(a)$$

$$= [\mathrm{F}(c) - \mathrm{F}(a)] + [\mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(c)]$$

$$= \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

2) ☞ F est une primitive de f sur I et G est une primitive de g sur I alors

La fonction F+G est une primitive de f+ g sur I donc

$$\int_a^b \left(f(x) + g(x)\right) dx$$

$$= [(\mathrm{F}+\mathrm{G})(\mathrm{b})] - [(\mathrm{F}+G)(\mathrm{a})]$$

$$= [\mathrm{F(b)} + \mathrm{G(b)}] - [\mathrm{F(a)} + G(\mathrm{a})]$$

$$= \mathrm{F(b)} + \mathrm{G(b)} - \mathrm{F(a)} - \mathrm{G(a)}$$

$$= \mathrm{F(b)} - \mathrm{F(a)} + \mathrm{G(b)} - \mathrm{G(a)}$$

$$= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

☞ La fonction kF est une primitive de kf sur I donc $\int_a^b kf(x)dx = [(kF)(x)]_a^b$

$$= (kF)(b) - (kF)(a)$$

$$= k.F(b) - k.F(a)$$

$$= k\int_a^b f(x)dx$$

ExerciceN°3

1) Soit f la fonction définie sur ℝ par $f(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^3}$

a) Déterminer une primitive F de f sur ℝ

b) Calculer $I = \int_0^1 \frac{2x}{(1+x^2)^3} dx$

2)On considère $J = \int_0^1 \frac{2x^3}{(1+x^2)^3} dx$

a) Calculer I+J

b) En déduire J

III) Intégrales et inégalités

1)Positivité de l'intégrale

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$

Si f est positive sur $[a,b]$

alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

Démonstration :

Soit F une primitive de f sur $[a,b]$ alors F est dérivable sur$[a,b]$et $F'(x) = f(x) \geq 0$

donc F est croissante sur $[a,b]$

On a : $a < b$ alors $F(a) \leq F(b)$ donc

$\mathrm{F}(b) - \mathrm{F(a)} \geq 0$

2)Corollaires

Corollaire1

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ avec $a < b$

Si f est positive et ne s'annule qu'en un nombre fini de réels de $[a,b]$

alors $\int_a^b f(x)dx > 0$

Corollaire2(Comparaison)

Soit f ,g et h trois fonctions continues sur $[a,b]$.

Si $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in [a,b]$ alors

$$\int_a^b h(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

Corollaire3

Si f est une fonction continue sur $[a,b]$

alors$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$

Exemple

Montrer que $\frac{1}{2} \leq \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx \leq 1$

☞Soit f la fonction définie sur[0,1] par

$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. f est continue sur [0,1]

Pour tout $x \in [0,1]$ on a: $0 \leq x \leq 1$

alors $0 \leq x^2 \leq 1$ donc $1 \leq 1 + x^2 \leq 2$

et par suite $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+x^2} \leq 1$ alors d'après

corollaire2:$\int_0^1 \frac{1}{2} dx \leq \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx \leq \int_0^1 1\, dx$

or$\int_0^1 \frac{1}{2} dx = [\frac{1}{2}x]_0^1 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$

et$\int_0^1 1\, dx = [x]_0^1 = 1 - 0 = 1$

donc$\frac{1}{2} \leq \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx \leq 1$

3) Valeur moyenne

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$

On appelle valeur moyenne de f sur $[a, b]$

le réel $\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

4) inégalité de la moyenne

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$

Si $m \leq f'(x) \leq M$ pour tout

$x \in [a, b]$ alors $m \leq \bar{f} \leq M$

IV) Intégration par parties

U et V deux fonctions dérivables sur $[a, b]$

U' et V' sont continues sur $[a, b]$

On a ; $(UV)' = U'V + V'U$

Alors $V'U = (UV)' - U'V$

Donc $\int_a^b V'(x)U(x)dx$

$= \int_a^b [(UV)'(x) - (U'V)(x)]dx$

$= \int_a^b (UV)'(x)dx - \int_a^b U'(x)V(x)dx$

$= [U(x)V(x)]_a^b - \int_a^b U'(x)V(x)dx$

Théorème

U et V deux fonctions dérivables sur $[a, b]$

U' et V' sont continues sur $[a, b]$

Alors ;

$\int_a^b V'(x)U(x)dx$

$= [U(x)V(x)]_a^b - \int_a^b U'(x)V(x)dx$

Exemple

Calculer $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(x)dx$

☞On pose

$\begin{cases} U(x) = x \text{ alors } U'(x) = 1 \\ V'(x) = \cos(x) \text{ alors } V(x) = \sin(x) \end{cases}$

$$I = [U(x)V(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} U'(x)V(x)dx$$

$$= [x\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)dx$$

$$= [x\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - [-\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= [\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - 0] - [-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos(0)$$

$$= \frac{\pi}{2} - 1$$

D'où $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(x)dx = \frac{\pi}{2} - 1$

V) Calcul d'aires planes

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1) Définition

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$.

L'aire en u.a de la partie du plan délimitée par la courbe représentative de f ,l'axe des abscisses$(O, \vec{\imath})$ et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est le réel positif

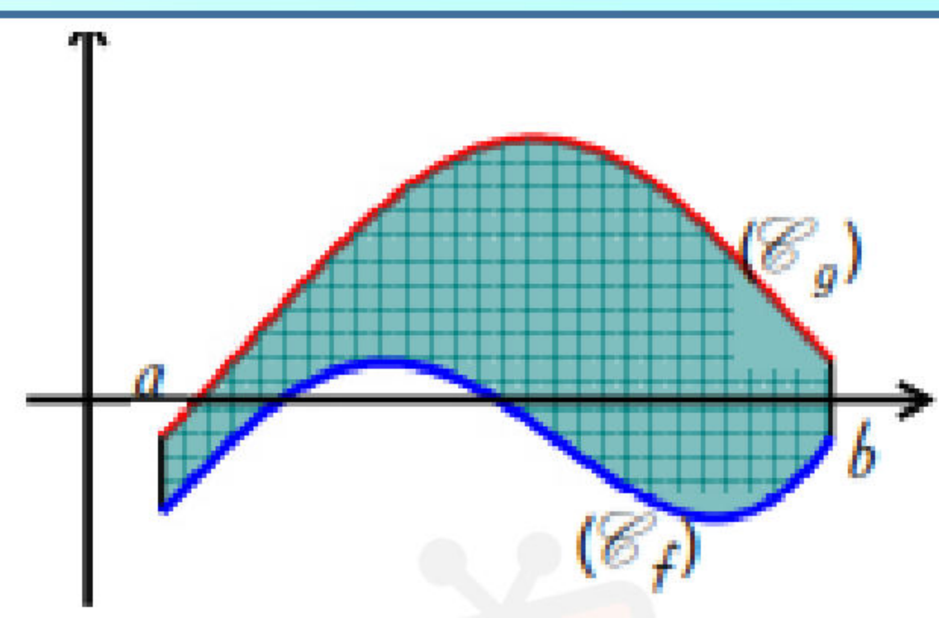
$\int_a^b |f(x)|dx$

2) Définition

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$.

L'aire en u.a de la partie du plan délimitée par la courbe représentative de f , la courbe représentative de g et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$

est le réel positif $\int_a^b |f(x) - g(x)|dx$



VI) Fonction définie par integrale

1) Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a un réel de I

La fonction F définie sur I par

$F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est la primitive de f sur I qui s'annule en a

2) Corollaire

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a un réel de I

Alors la fonction $F: x \longmapsto \int_a^x f(t)dt$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$

$F'(x) = f(x)$